

# Раскрытие солнечной батареи КА

## Прикладные задачи динамики твердого тела и систем тел

Юдинцев В. В.

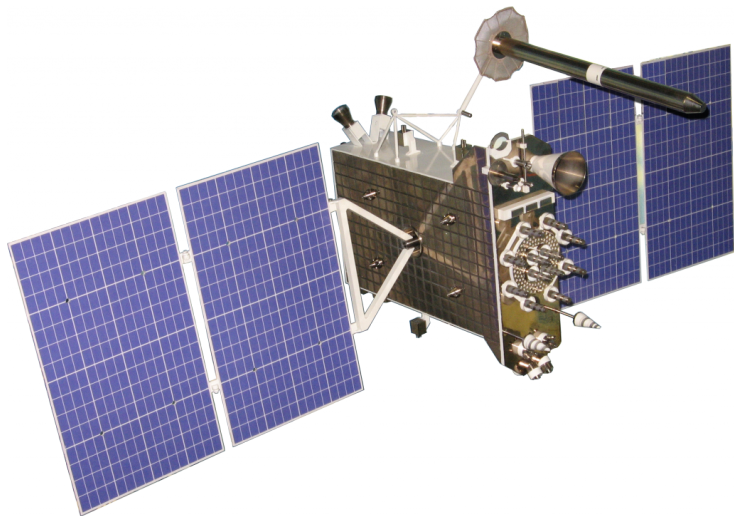
Кафедра теоретической механики

15 ноября 2024 г.



**САМАРСКИЙ** УНИВЕРСИТЕТ  
SAMARA UNIVERSITY

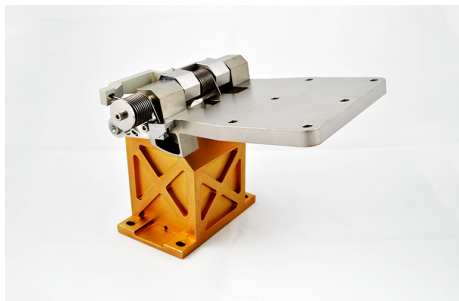
# Солнечные батареи КА



КА Глонасс-К  
<http://www.spacecorp.ru>

## **Элементы конструкции**

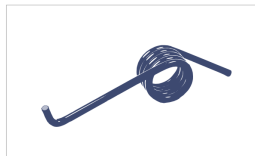
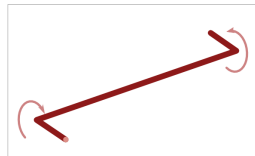
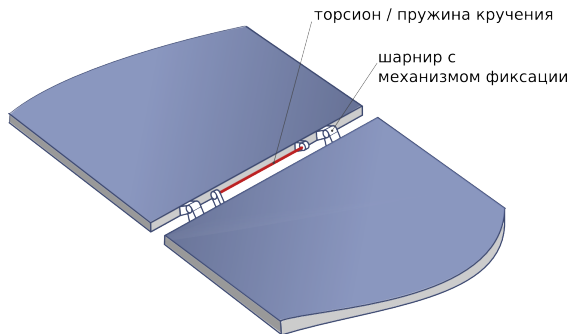
# Элементы механической системы



<http://www.honeybeerobotics.com>

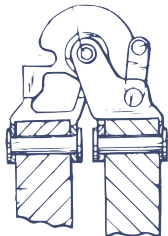
- Шарниры.
- Приводы (пружины кручения, торсионы, электроприводы, тросовые приводы).
- Элементы фиксации.

# Пружины кручения, торсионы

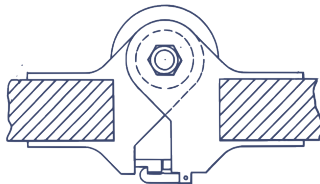
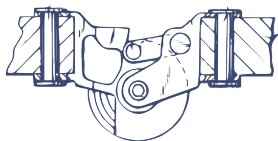


# Элементы фиксации (защелки)

начальное положение створок



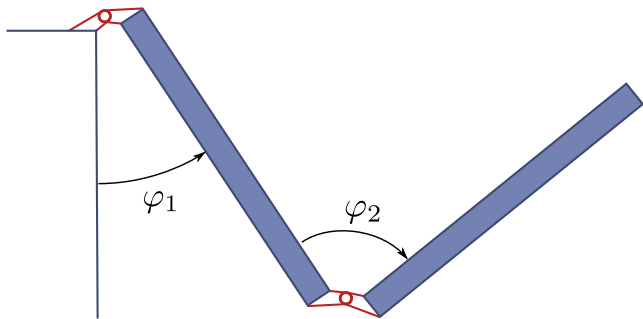
раскрытое положение створок



EP Patent App. EP19,960,305,338, US 5620529 A

# Математическая модель

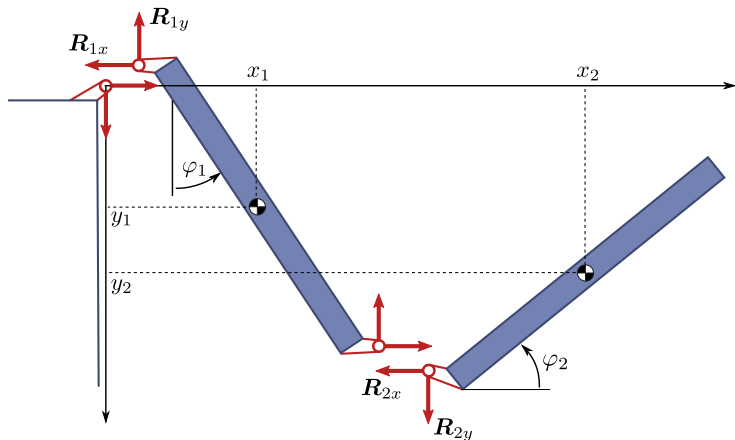
# Формализм Лагранжа



- минимальное количество обобщенных координат и уравнений;
- в уравнения не входят реакции связей.



# Уравнения Ньютона-Эйлера



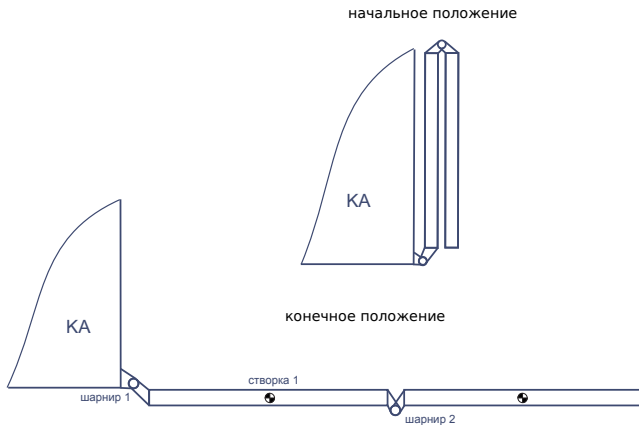
- большое количество уравнений ( $6N + c$ );
- в уравнения входят реакции связей.

## Принятые допущения

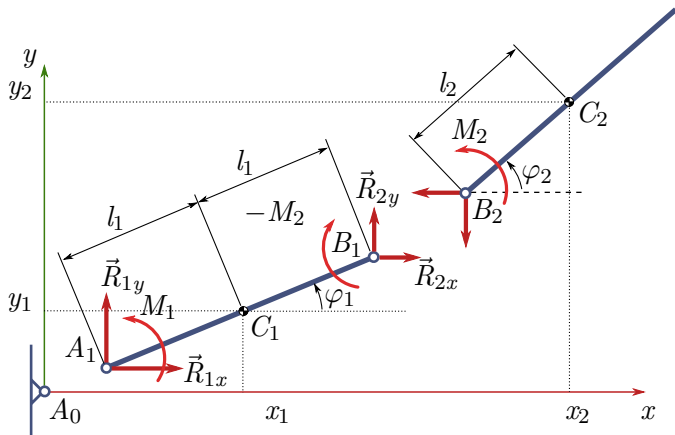
- Створки рассматриваются как абсолютно твёрдые тела.
- КА находится в покое.
- Движение створок не оказывает влияние на движение КА.
- Рассматривается плоское движение створок.

- Движение створок рассматривается относительно системы координат  $Oxy$ , связанной космическим аппаратом.
- Положение  $i$ -ой створки относительно системы координат  $Oxy$  задается координатами  $x_i, y_i$ .
- Угловое положение створки  $i$  определяется углом  $\varphi_i$ .

# Схема системы

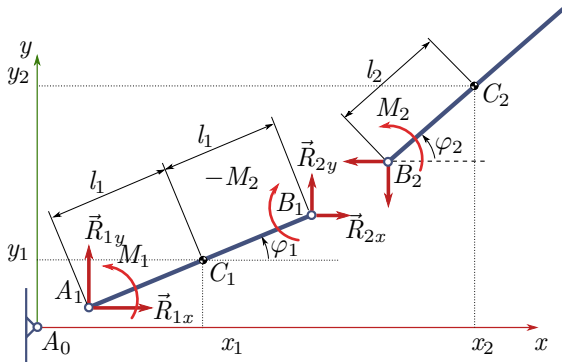


# Упрощенная схема системы



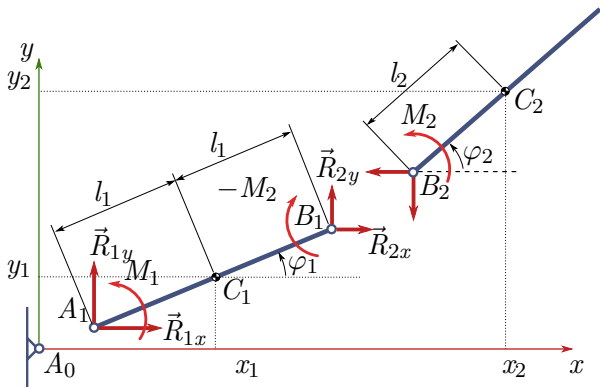
# Уравнения движения створки 1

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 &= R_{1x} + R_{2x}, \\ m_1 \ddot{y}_1 &= R_{1y} + R_{2y}, \\ J_{1z} \ddot{\varphi}_1 &= (R_{1x} - R_{2x})l_1 \sin \varphi_1 + (R_{2y} - R_{1y})l_1 \cos \varphi_1 + M_1 - M_2. \end{cases}$$



## Уравнения движения створки 2

$$\begin{cases} m_2 \ddot{x}_2 &= -R_{2x}, \\ m_2 \ddot{y}_2 &= -R_{2y}, \\ J_{2z} \ddot{\varphi}_2 &= -R_{2x} l_2 \sin \varphi_2 + R_{2y} l_2 \cos \varphi_2 + M_2. \end{cases} \quad (1)$$



## Уравнения движения створок

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 \ddot{x}_1 = R_{1x} + R_{2x}, \\ m_1 \ddot{y}_1 = R_{1y} + R_{2y}, \\ J_{1z} \ddot{\varphi}_1 = (R_{1x} - R_{2x})l_1 \sin \varphi_1 + (R_{2y} - R_{1y})l_1 \cos \varphi_1 + M_1 - M_2, \\ m_2 \ddot{x}_2 = -R_{2x}, \\ m_2 \ddot{y}_2 = -R_{2y}, \\ J_{2z} \ddot{\varphi}_2 = -R_{2x}l_2 \sin \varphi_2 + R_{2y}l_2 \cos \varphi_2 + M_2. \end{array} \right. \quad (2)$$

Шесть дифференциальных уравнений (2) движения содержат 10 неизвестных:

$$\ddot{x}_1, \ddot{y}_1, \ddot{\varphi}_1, \ddot{x}_2, \ddot{y}_2, \ddot{\varphi}_2, R_{1x}, R_{1y}, R_{2x}, R_{2y}.$$

Уравнения (2) должны быть дополнены уравнениями связей, связывающими кинематические параметры отдельных створок.

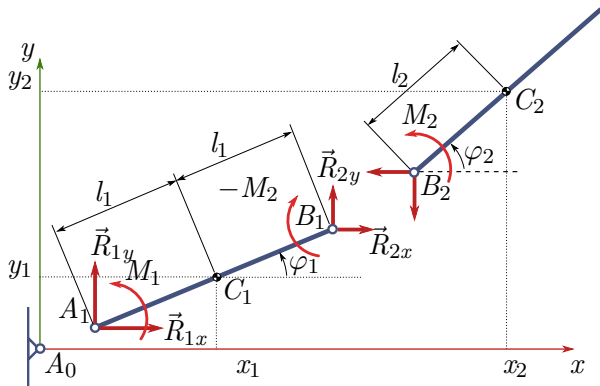


# Уравнения кинематических связей для шарнира А

Точка  $A_1$  совпадает с точкой  $A_0(0, 0)$ :

$$x_{A_1} = x_1 - l_1 \cos \varphi_1 = 0, \quad (3)$$

$$y_{A_1} = y_1 - l_1 \sin \varphi_1 = 0. \quad (4)$$

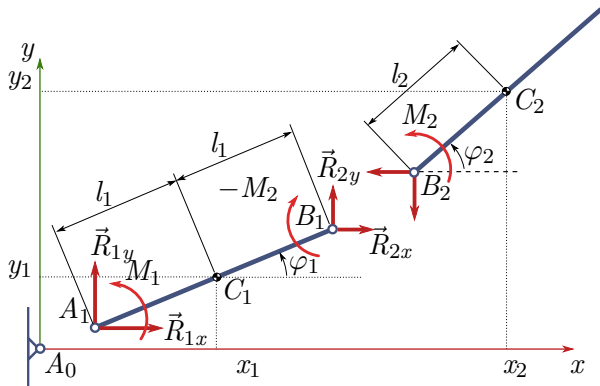


# Уравнения кинематических связей для шарнира В

Точка  $B_2$  совпадает с точкой  $B_1$ :

$$x_{B_1} = x_{B_2} \quad \Rightarrow \quad x_1 + l_1 \cos \varphi_1 = x_2 - l_2 \cos \varphi_2, \quad (5)$$

$$y_{B_1} = y_{B_2} \quad \Rightarrow \quad y_1 + l_1 \sin \varphi_1 = y_2 - l_2 \sin \varphi_2, \quad (6)$$



$$\begin{cases} x_1 - l_1 \cos \varphi_1 = 0, \\ y_1 - l_1 \sin \varphi_1 = 0, \\ x_1 + l_1 \cos \varphi_1 = x_2 - l_2 \cos \varphi_2, \\ y_1 + l_1 \sin \varphi_1 = y_2 - l_2 \sin \varphi_2. \end{cases} \quad (7)$$

# Дифференциально-алгебраические уравнения

Объединяя уравнения движения створок и уравнения связей, получим систему дифференциально - алгебраических (ДАУ) уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 \ddot{x}_1 = R_{1x} + R_{2x}, \\ m_1 \ddot{y}_1 = R_{1y} + R_{2y}, \\ J_{1z} \ddot{\varphi}_1 = (R_{1x} - R_{2x})l_1 \sin \varphi_1 + (R_{2y} - R_{1y})l_1 \cos \varphi_1 + M_1 - M_2, \\ m_2 \ddot{x}_2 = -R_{2x}, \\ m_2 \ddot{y}_2 = -R_{2y}, \\ J_{2z} \ddot{\varphi}_2 = -R_{2x}l_2 \sin \varphi_2 + R_{2y}l_2 \cos \varphi_2 + M_2, \\ x_1 - l_1 \cos \varphi_1 = 0, \\ y_1 - l_1 \sin \varphi_1 = 0, \\ x_1 + l_1 \cos \varphi_1 = x_2 - l_2 \cos \varphi_2, \\ y_1 + l_1 \sin \varphi_1 = y_2 - l_2 \sin \varphi_2. \end{array} \right. \quad (8)$$

## Дифференцирование уравнений связи

Для решения системы ДАУ необходимо продифференцировать уравнения связей:

$$\begin{cases} x_1 - l_1 \cos \varphi_1 = 0, \\ y_1 - l_1 \sin \varphi_1 = 0, \\ x_1 + l_1 \cos \varphi_1 = x_2 - l_2 \cos \varphi_2, \\ y_1 + l_1 \sin \varphi_1 = y_2 - l_2 \sin \varphi_2. \end{cases} \quad (9)$$

Первое дифференцирование уравнений связи:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 + \dot{\varphi}_1 l_1 \sin \varphi_1 = 0, \\ \dot{y}_1 - \dot{\varphi}_1 l_1 \cos \varphi_1 = 0, \\ \dot{x}_1 - \dot{\varphi}_1 l_1 \sin \varphi_1 = \dot{x}_2 + \dot{\varphi}_1 l_2 \sin \varphi_2, \\ \dot{y}_1 + \dot{\varphi}_1 l_1 \cos \varphi_1 = \dot{y}_2 - \dot{\varphi}_2 l_2 \cos \varphi_2. \end{cases}$$

# Дифференцирование уравнений связи

Для решения системы ДАУ необходимо продифференцировать уравнения связей:

$$\begin{cases} x_1 - l_1 \cos \varphi_1 = 0, \\ y_1 - l_1 \sin \varphi_1 = 0, \\ x_1 + l_1 \cos \varphi_1 = x_2 - l_2 \cos \varphi_2, \\ y_1 + l_1 \sin \varphi_1 = y_2 - l_2 \sin \varphi_2. \end{cases} \quad (9)$$

Второе дифференцирование уравнений связи:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \ddot{\varphi}_1 l_1 \sin \varphi_1 + \dot{\varphi}_1^2 l_1 \cos \varphi_1 = 0, \\ \ddot{y}_1 - \ddot{\varphi}_1 l_1 \cos \varphi_1 + \dot{\varphi}_1^2 l_1 \sin \varphi_1 = 0, \\ \ddot{x}_1 - \ddot{\varphi}_1 l_1 \sin \varphi_1 - \dot{\varphi}_1^2 l_1 \cos \varphi_1 = \ddot{x}_2 + \ddot{\varphi}_2 l_2 \sin \varphi_2 + \dot{\varphi}_2^2 l_2 \cos \varphi_2, \\ \ddot{y}_1 + \ddot{\varphi}_1 l_1 \cos \varphi_1 - \dot{\varphi}_1^2 l_1 \sin \varphi_1 = \ddot{y}_2 - \ddot{\varphi}_2 l_2 \cos \varphi_2 + \dot{\varphi}_2^2 l_2 \sin \varphi_2. \end{cases}$$

# Система линейных уравнений

Система линейных уравнений относительно  $\ddot{x}_1, \ddot{y}_1, \ddot{\varphi}_1, \ddot{x}_2, \ddot{y}_2, \ddot{\varphi}_2, R_{1x}, R_{1y}, R_{2x}, R_{2y}$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 \ddot{x}_1 = R_{1x} + R_{2x}, \\ m_1 \ddot{y}_1 = R_{1y} + R_{2y}, \\ J_{1z} \ddot{\varphi}_1 = (R_{1x} - R_{2x}) l_1 \sin \varphi_1 + (R_{2y} - R_{1y}) l_1 \cos \varphi_1 + M_1 - M_2, \\ m_2 \ddot{x}_2 = -R_{2x}, \\ m_2 \ddot{y}_2 = -R_{2y}, \\ J_{2z} \ddot{\varphi}_2 = -R_{2x} l_2 \sin \varphi_2 + R_{2y} l_2 \cos \varphi_2 + M_2, \\ \ddot{x}_1 + \ddot{\varphi}_1 l_1 \sin \varphi_1 + \dot{\varphi}_1^2 l_1 \cos \varphi_1 = 0, \\ \ddot{y}_1 - \ddot{\varphi}_1 l_1 \cos \varphi_1 + \dot{\varphi}_1^2 l_1 \sin \varphi_1 = 0, \\ \ddot{x}_1 - \ddot{\varphi}_1 l_1 \sin \varphi_1 - \dot{\varphi}_1^2 l_1 \cos \varphi_1 = \ddot{x}_2 + \ddot{\varphi}_2 l_2 \sin \varphi_2 + \dot{\varphi}_2^2 l_2 \cos \varphi_2, \\ \ddot{y}_1 + \ddot{\varphi}_1 l_1 \cos \varphi_1 - \dot{\varphi}_1^2 l_1 \sin \varphi_1 = \ddot{y}_2 - \ddot{\varphi}_2 l_2 \cos \varphi_2 + \dot{\varphi}_2^2 l_2 \sin \varphi_2. \end{array} \right. \quad (10)$$

# Система линейных уравнений

Система линейных уравнений относительно  $\ddot{x}_1, \ddot{y}_1, \ddot{\varphi}_1, \ddot{x}_2, \ddot{y}_2, \ddot{\varphi}_2, R_{1x}, R_{1y}, R_{2x}, R_{2y}$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 \ddot{x}_1 - R_{1x} - R_{2x} = 0, \\ m_1 \ddot{y}_1 - R_{1y} - R_{2y} = 0, \\ J_{1z} \ddot{\varphi}_1 - (R_{1x} - R_{2x}) l_1 \sin \varphi_1 - (R_{2y} - R_{1y}) l_1 \cos \varphi_1 = M_1 - M_2, \\ m_2 \ddot{x}_2 + R_{2x} = 0, \\ m_2 \ddot{y}_2 + R_{2y} = 0, \\ J_{2z} \ddot{\varphi}_2 + R_{2x} l_2 \sin \varphi_2 - R_{2y} l_2 \cos \varphi_2 = M_2, \\ \ddot{x}_1 + \ddot{\varphi}_1 l_1 \sin \varphi_1 = -\dot{\varphi}_1^2 l_1 \cos \varphi_1, \\ \ddot{y}_1 - \ddot{\varphi}_1 l_1 \cos \varphi_1 = -\dot{\varphi}_1^2 l_1 \sin \varphi_1, \\ \ddot{x}_1 - \ddot{\varphi}_1 l_1 \sin \varphi_1 - \ddot{x}_2 - \ddot{\varphi}_2 l_2 \sin \varphi_2 = \dot{\varphi}_1^2 l_1 \cos \varphi_1 + \dot{\varphi}_2^2 l_2 \cos \varphi_2, \\ \ddot{y}_1 + \ddot{\varphi}_1 l_1 \cos \varphi_1 - \ddot{y}_2 + \ddot{\varphi}_2 l_2 \cos \varphi_2 = \dot{\varphi}_1^2 l_1 \sin \varphi_1 + \dot{\varphi}_2^2 l_2 \sin \varphi_2. \end{array} \right. \quad (10)$$



# Матрица коэффициентов при ускорениях и реакциях

$$AX = B$$

$$A = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & J_{1z} & 0 & 0 & 0 & -l_1 s_{\varphi_1} & l_1 c_{\varphi_1} & l_1 s_{\varphi_1} & -l_1 c_{\varphi_1} \\ 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_{2z} & 0 & 0 & l_2 s_{\varphi_2} & -l_2 c_{\varphi_2} \\ 1 & 0 & l_1 s_{\varphi_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -l_1 c_{\varphi_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -l_1 s_{\varphi_1} & -1 & 0 & -l_2 s_{\varphi_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & l_1 c_{\varphi_1} & 0 & -1 & l_2 c_{\varphi_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

где

$$c_{\varphi_1} = \cos \varphi_1, s_{\varphi_1} = \sin \varphi_1, c_{\varphi_2} = \cos \varphi_2, s_{\varphi_2} = \sin \varphi_2.$$

# Матрица неизвестных ускорений и реакций

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B}$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{y}_1 \\ \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{\varphi}_2 \\ R_{1x} \\ R_{1y} \\ R_{2x} \\ R_{2y} \end{bmatrix}$$

# Матрица правых частей

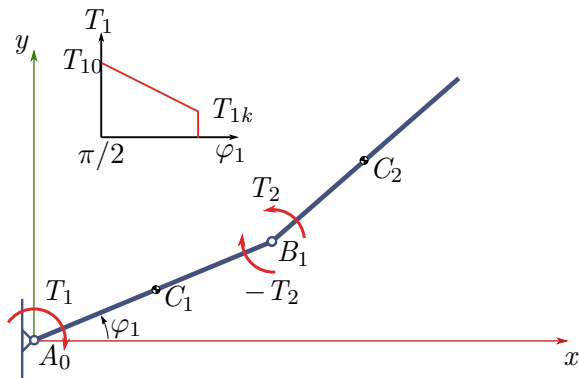
$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_1 - M_2 \\ 0 \\ 0 \\ M_2 \\ -\dot{\varphi}_1^2 l_1 \cos \varphi_1 \\ -\dot{\varphi}_1^2 l_1 \sin \varphi_1 \\ \dot{\varphi}_1^2 l_1 \cos \varphi_1 + \dot{\varphi}_2^2 l_2 \cos \varphi_2 \\ \dot{\varphi}_1^2 l_1 \sin \varphi_1 + \dot{\varphi}_2^2 l_2 \sin \varphi_2 \end{bmatrix}$$

# Силы и моменты

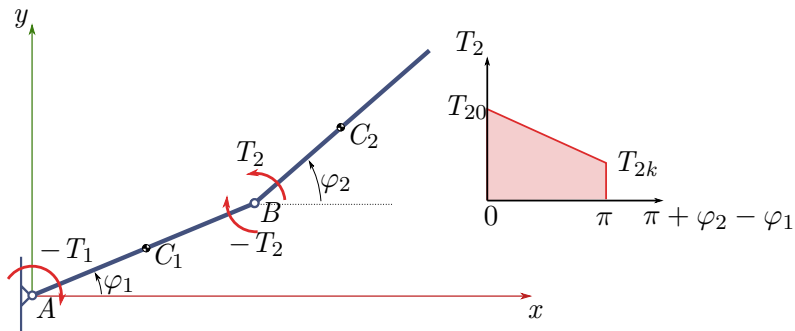
## Моменты приводов. Шарнир А.

$$T_1 = -(T_{10} - \frac{T_{10} - T_{1k}}{\pi/2}(\pi/2 - \varphi_1)). \quad (11)$$



# Моменты приводов. Шарнир Б.

$$T_2 = T_{20} - \frac{T_{20} - T_{2k}}{\pi} (\pi + \varphi_2 - \varphi_1) \quad (12)$$

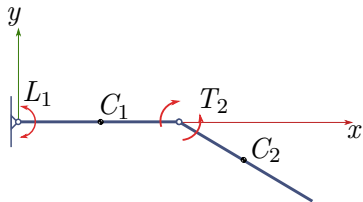


# Створка 1

При достижении створкой заданного конечного положения срабатывают механизмы фиксации, установленные в шарнире. Момент, создаваемый механизмом фиксации первой створки:

$$L_1 = -(c_1\varphi_1 + d_1\dot{\varphi}_1) \quad (13)$$

где  $c_1$ ,  $d_1$  – жесткость и коэффициент демпфирования элемента фиксации.



# Створка 1

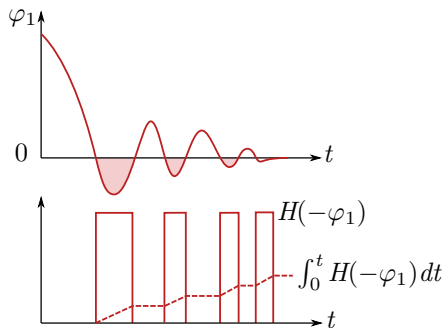
Момент  $L_1$  должен „включиться“ только после достижения створкой конечного положения ( $\varphi_1 = 0$ ) и далее не „выключаться“ при любых значениях  $\varphi_1$ :

$$L_1 = -(c_2\varphi_1 + d_2\dot{\varphi}_2) \cdot S_1(t) \quad (14)$$

где  $S_1(t)$  функция, которая становится равна 1 при достижении створкой 1 своего конечного положения.



# Створка 1



$$S_1 = H\left(\int_0^t H(-\varphi_1) dt\right)$$

$H$  – функция Хевисайда:

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Функция  $S_1 > 0$  для всех  $t > t_1$  где  $t_1$  – время достижения створкой 1 конечного (раскрытого) положения:

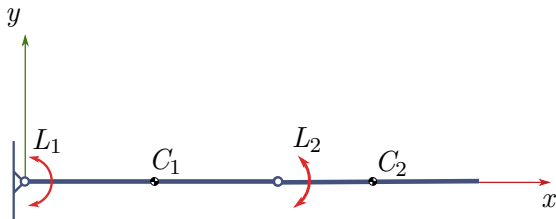
$$\varphi_1(t_1) = 0$$

## Створка 2

При достижении створкой конечного положения срабатывает механизм фиксации, установленный в шарнире. Момент, действующий на створку 2 и удерживающий её в конечном положении:

$$L_2 = -c_2(\varphi_2 - \varphi_1) - d_2(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1) \quad (15)$$

где  $c_2$ ,  $d_2$  – жесткость и коэффициент демпфирования элемента фиксации.



## Створка 2

Для механизма фиксации между 1 и 2 створками:

$$S_2 = H \left( \int_0^t H(\varphi_2 - \varphi_1) dt \right)$$

Функция  $S_2 > 0$  для всех  $t > t_2$  где  $t_2$  – время достижения створкой 2 конечного (раскрытого) положения:

$$\varphi_2(t_2) - \varphi_2(t_2) = 0.$$

# Моменты действующие на створку

$$M_1 = T_1 + L_1$$

$$M_2 = T_2 + L_2$$

# Задание

<https://classmech.ru/pages/mechanics-in-space/solar-array-open/>

## Список использованных источников

- 1 Аналитическое проектирование механических систем: Учебное пособие / Круглов Г. Е. Самар. гос. аэрокосм. ун-т. Самара, 2001.
- 2 Юдинцев В. В. Моделирование процессов раскрытия многоэлементных конструкций космических аппаратов. Всероссийский научно-технический журнал “Полет”, №5. 2012 с. 28 - 33.