

Отделение космического аппарата
Математические методы анализа и проектирования
космических систем

Кафедра теоретической механики

Юдинцев В. В.

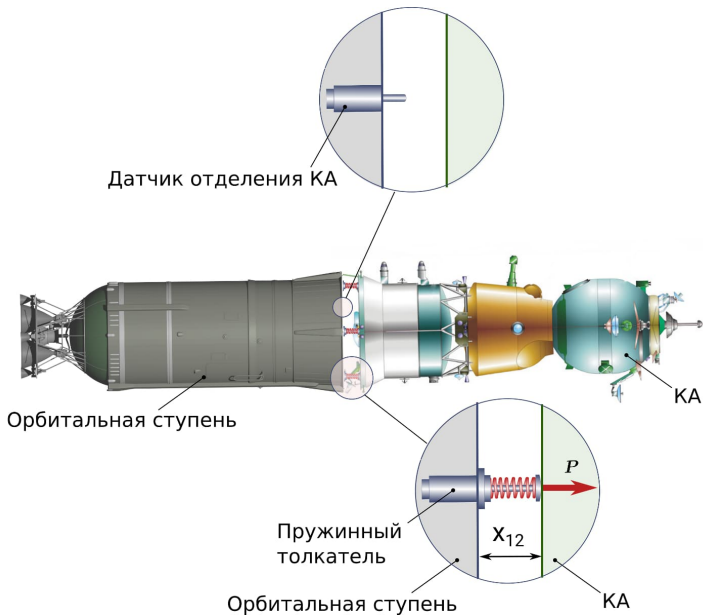
3 сентября 2026 г.



САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
SAMARA UNIVERSITY

- 1 Средства отделения и разделения
- 2 Модель поступательного движения
- 3 Модель плоского движения
- 4 Модель пространственного движения

Отделение космического аппарата



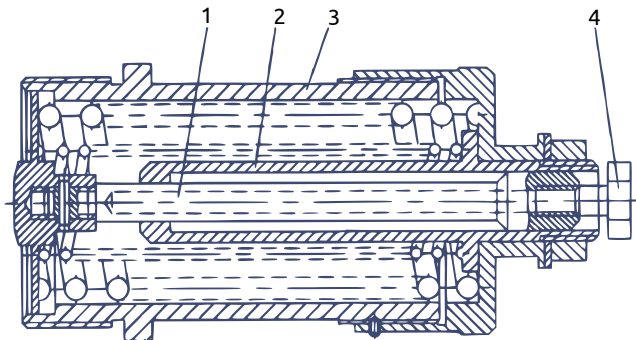
Требования к системе отделения КА

- Заданная скорость отделения полезного груза
- Минимальная угловая скорость отделения полезного груза
- Исключение взаимного соударения отработавшей ступени и полезного груза

Средства отделения и разделения

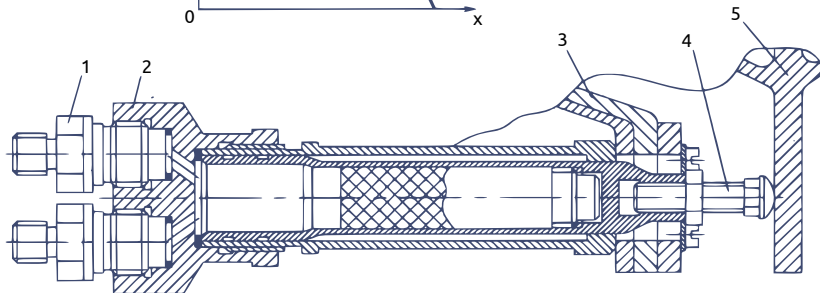
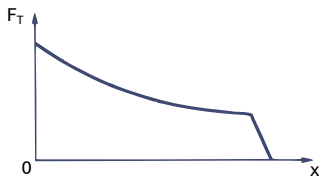
- Средства крепления и разделения:
пирочки, пирозамки, пиромеханические устройства, пироболты.
- Средства отделения:
пиротолкатели, пневмотолкатели, пружинные толкатели, ...
- Сопутствующие элементы:
электроразъемы, пневморазъемы, шпильки, ...

Пружинный толкатель [1]



1 - шток; 2 - обойма внутренней пружины; 3 - корпус;
4 - технологическая заглушка.

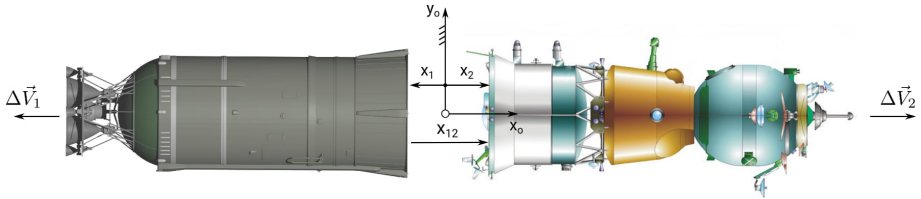
Пиротолкатель [1]



1 - пиропатрон; 2 - корпус; 3 - пассивный отделяемый блок; 4 - шток;
5 - активный отделяемый блок.

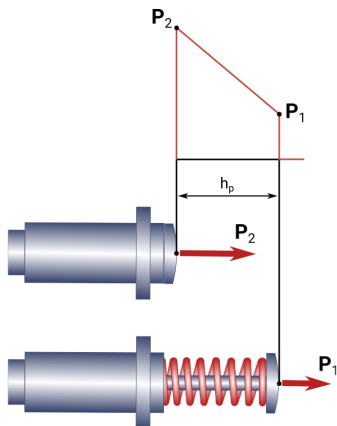
Модель поступательного движения

Первое приближение: поступательное движение



$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = -nP(x_{12}) \\ m_2 \ddot{x}_2 = +nP(x_{12}) \end{cases}$$

Сила пружинного толкателя



$$P(x_{12}) = P_2 - cx_{12} = P_2 - \left(\frac{P_2 - P_1}{h_p} \right) x_{12}$$

Уравнения поступательного движения

Умножим второе уравнение на m_1 и вычтем первое, умноженное на m_2

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = -nP(x_{12}) \\ m_2 \ddot{x}_2 = +nP(x_{12}) \end{cases}$$

Получим:

$$m_2 m_1 (\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) = nP(x_{12}) m_1 + nP(x_{12}) m_2$$

или

$$\frac{m_2 m_1}{m_1 + m_2} \ddot{x}_{12} = nP(x_{12})$$

Приведенная масса m_{12}

$$m_{12} = \frac{m_2 m_1}{m_1 + m_2}$$

Уравнение относительного движения

Движение точки с массой, равной приведённой массе системы

$$m_{12}\ddot{x}_{12} = nP(x_{12})$$

Подставляя выражение для силы пружинного толкателя

$$m_{12}\ddot{x}_{12} = nP_2 - ncx_{12}$$

Это неоднородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$m_{12}\ddot{x}_{12} + ncx_{12} = nP_2$$

Обозначим $c^* = nc$ - суммарная жесткость пружин толкателей,
 $P_2^* = nP_2$ - суммарное начальное усилие толкателей.

Решение уравнения

$$m_{12}\ddot{x}_{12} + c^*x_{12} = P_2^*$$

Характеристическое уравнение однородного уравнения:

$$m_{12}\lambda^2 + c^* = 0, \quad \rightarrow \quad \lambda_{1,2} = i\sqrt{c^*/m_{12}}$$

Общее решение однородного уравнения

$$x_{12}^0 = C_1 \sin \sqrt{\frac{c^*}{m_{12}}}t + C_2 \cos \sqrt{\frac{c^*}{m_{12}}}t$$

Частное решение с учетом правой части-константы:

$$x_{12}^* = A = \text{const}$$

Подставляя частное решение в уравнение, получим:

$$A = \frac{P_2^*}{c^*}$$

Начальные условия

$$x_{12} = C_1 \sin \sqrt{\frac{c^*}{m_{12}}} t + C_2 \cos \sqrt{\frac{c^*}{m_{12}}} t + \frac{P_2^*}{c^*}$$

В начальный момент времени $t = 0$

$$\begin{cases} x_{12}(0) = 0 \\ \dot{x}_{12}(0) = 0 \end{cases}$$

Подставляя начальные условия, определим постоянные интегрирования

$$\begin{cases} 0 = C_2 + \frac{P_2^*}{c^*} \\ 0 = C_1 \sqrt{\frac{c^*}{m_{12}}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = -\frac{P_2^*}{c^*} \\ C_1 = 0 \end{cases}$$

Изменение расстояния между КА и носителем от времени:

$$x_{12} = \frac{P_2^*}{c^*} \left(1 - \cos \sqrt{\frac{c^*}{m_{12}}} t \right)$$

Относительная скорость:

$$v_{12} = \frac{dx_{12}}{dt} = \frac{P_2^*}{\sqrt{c^* m_{12}}} \sin \sqrt{\frac{c^*}{m_{12}}} t$$

Время работы толкателей

При достижении $x_{12} = h_p$ толкатели заканчивают работу и тела друг относительно друга движутся с постоянной скоростью. Из уравнения

$$h_p = \frac{P_2^*}{c^*} \left(1 - \cos \sqrt{\frac{c^*}{m_{12}}} t_p \right)$$

определим время работы толкателей:

$$t_p = \sqrt{\frac{m_{12}}{c^*}} \arccos \left(1 - \frac{h_p c^*}{P_2^*} \right) = \sqrt{\frac{m_{12}}{c^*}} \arccos \frac{P_1^*}{P_2^*}$$

При $t \leq t_p$:

$$x_{12} = \frac{P_2^*}{c^*} \left(1 - \cos \sqrt{\frac{c^*}{m_{12}}} t \right)$$

$$v_{12} = \frac{dx_{12}}{dt} = \frac{P_2^*}{\sqrt{c^* m_{12}}} \sin \sqrt{\frac{c^*}{m_{12}}} t$$

При $t > t_p$:

$$x_{12} = v_{max} \cdot (t - t_p)$$

$$v_{12} = v_{max} = \frac{P_2^*}{\sqrt{c^* m_{12}}} \sin \sqrt{\frac{c^*}{m_{12}}} t_p$$

Количество движения системы не изменяется (движение тел системы происходит под действием внутренних сил):

$$m_1 \dot{x}_1 + m_2 \dot{x}_2 = 0$$

Изменение кинетической энергии равно работе внутренних сил:

$$m_1 \dot{x}_1^2 + m_2 \dot{x}_2^2 = 2A_p$$

где A_p - суммарная работа толкателей.

Относительная скорость

Движение точки с массой, равной приведённой массе системы

$$m_{12}\ddot{x}_{12} = nP(x_{12})$$

Для движения этой точки справедлива теорема об изменении кинетической энергии

$$m_{12}\dot{x}_{12}^2 = 2A_p,$$

Относительная скорость КА и орбитальной ступени:

$$\dot{x}_{12} = \sqrt{\frac{2A_p}{m_{12}}}.$$

Приращения скоростей КА и орбитальной ступени

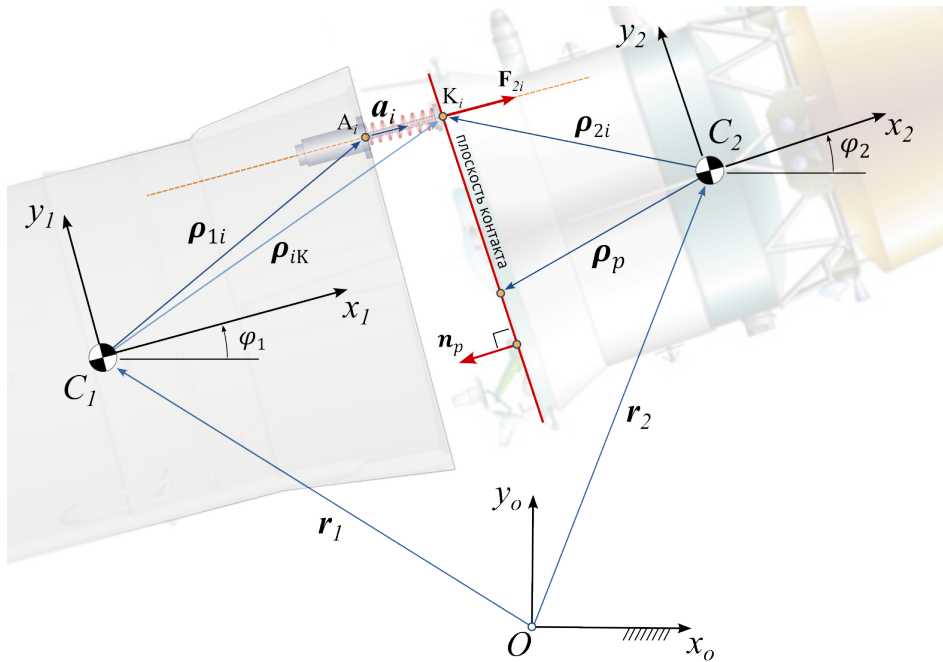
Импульс толкателей отделения

$$S = \dot{x}_{12}m_{12} = \sqrt{2A_p m_{12}}.$$

Приращение скоростей ступени и КА (по модулю):

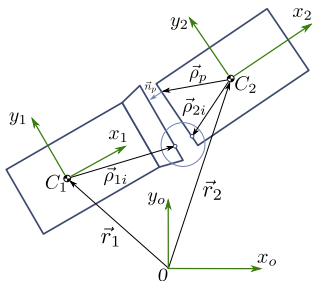
$$v_1 = S/m_1 = \frac{\sqrt{2A_p m_{12}}}{m_1}, \quad v_2 = S/m_2 = \frac{\sqrt{2A_p m_{12}}}{m_2}.$$

Модель плоского движения



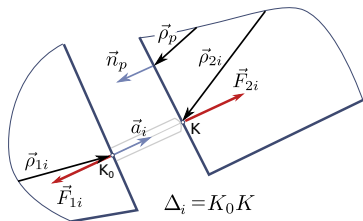
- КА и орбитальная ступень – абсолютно твёрдые тела.
- Сумма внешних сил, действующих на систему равна нулю.
Движение системы рассматривается под действием внутренних сил - сил толкателей.
- Сила i -го толкателя пропорциональна перемещению его штока ($\Delta_i = A_i K_i$).
- Направление силы действия i -го толкателя на КА и орбитальную ступень определяется единичным вектором $\vec{a}_i$.

Исходные данные

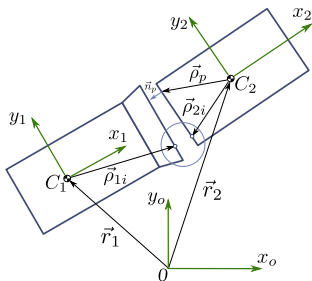


- Массы и тензоры инерции КА и орбитальной ступени, положения центров масс тел.
- Линия действия силы i -го толкателя определяется координатным столбцом единичного вектора $\vec{a}_i$:

$$\mathbf{a}_i^{(1)} = (a_{ix}^{(1)}, a_{iy}^{(1)}, a_{iz}^{(1)})^T = \text{const.}$$



Исходные данные

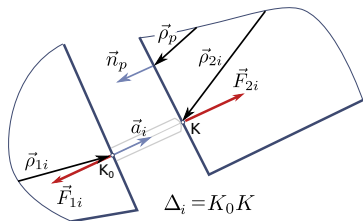


- Положение i -го толкателя на орбитальной ступени определяется вектор-столбцом $\vec{\rho}_{1i}$:

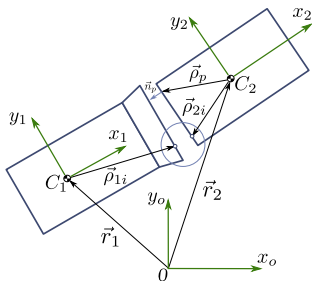
$$\rho_{1i}^{(1)} = (\rho_{1ix}^{(1)}, \rho_{1iy}^{(1)}, \rho_{1iz}^{(1)})^T = \text{const.}$$

- Положение плоскости стыка КА определяется вектор-столбцами $\vec{n}_p, \vec{\rho}_p$:

$$\rho_p^{(2)} = \text{const}, \quad n_p^{(2)} = \text{const.}$$



Уравнение линии действия толкателя



- Уравнение прямой (линии действия толкателя) относительно полюса C_1

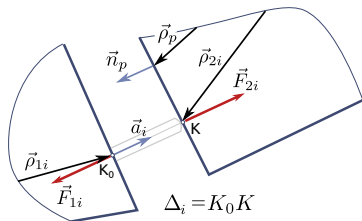
$$\vec{\rho}_{1K} = \vec{\rho}_{1i} + \vec{a}_i \Delta_i$$

- относительно полюса O

$$\vec{\rho}_{0K} = \vec{r}_1 + \vec{\rho}_{1i} + \vec{a}_i \Delta_i$$

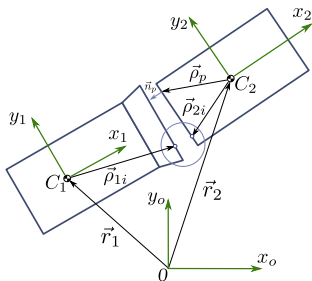
- относительно полюса C_2

$$\vec{\rho}_{2i} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 + \vec{\rho}_{1i} + \vec{a}_i \Delta_i$$



$$\Delta_i = K_0 K$$

Уравнение плоскости поперечного стыка

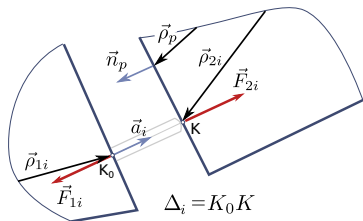


- Условие принадлежности точки контакта плоскости поперечного стыка

$$(\vec{\rho}_{2i} - \vec{\rho}_p) \cdot \vec{n}_p = 0$$

- Точка контакта K должна принадлежать и плоскости и линии действия силы толкателя:

$$\begin{cases} \vec{\rho}_{2i} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 + \vec{\rho}_{1i} + \vec{a}_i \Delta_i \\ (\vec{\rho}_{2i} - \vec{\rho}_p) \cdot \vec{n}_p = 0 \end{cases}$$



Определение перемещения штока толкателя

$$\begin{cases} \vec{\rho}_{2i} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 + \vec{\rho}_{1i} + \vec{a}_i \Delta_i \\ (\vec{\rho}_{2i} - \vec{\rho}_p) \cdot \vec{n}_p = 0 \end{cases}$$

Подставляя $\vec{\rho}_{2i}$ из первого уравнения во второе, получим

$$(\vec{r}_1 - \vec{r}_2 + \vec{\rho}_{1i} + \vec{a}_i \Delta_i - \vec{\rho}_p) \cdot \vec{n}_p = 0.$$

Векторная форма выражения для определения перемещения штока толкателя:

$$\Delta_i = \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1 - \vec{\rho}_{1i} + \vec{\rho}_p) \cdot \vec{n}_p}{\vec{a}_i \cdot \vec{n}_p}$$

Радиус-вектор точки контакта относительно полюса C_2 :

$$\vec{\rho}_{2i} = \vec{r}_1 + \vec{a}_i \Delta_i - \vec{r}_2$$

Векторы и вектор-столбцы

Координатные столбцы векторов (вектор-столбцы), определяющих положение и направление толкателей, заданы в базисе $C_1x_1y_1z_1^*$:

$$\rho_{1i}^{(1)}, a_i^{(1)}$$

Координатные столбцы векторов, определяющих положение и ориентацию плоскости стыка КА, заданы в базисе $C_2x_2y_2z_2$:

$$\rho_p^{(2)}, n_p^{(2)}$$

*Верхний индекс в скобках обозначает номер базиса, в котором записаны координатные столбцы.

Векторная и координатная формы

Векторная форма выражения для определения перемещения штока толкателя:

$$\Delta_i = \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1 - \vec{\rho}_{1i} + \vec{\rho}_p) \cdot \vec{n}_p}{\vec{a}_i \cdot \vec{n}_p}$$

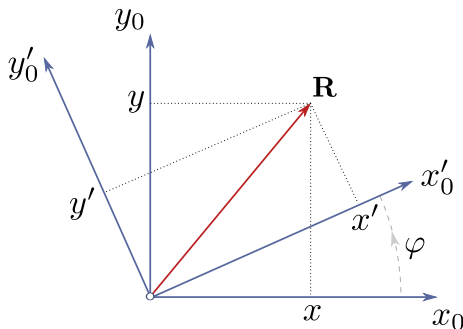
Координатная форма выражения для определения перемещения штока толкателя имеет вид:

$$\Delta_i = \frac{\mathbf{n}_p^{(2)T} [\mathbf{A}^{2T} (\mathbf{r}_2^{(0)} - \mathbf{r}_1^{(0)} - \mathbf{A}^1 \boldsymbol{\rho}_{1i}^{(1)}) + \boldsymbol{\rho}_p^{(2)}]}{\mathbf{a}_i^{(1)T} \mathbf{A}^{1T} \mathbf{A}^2 \mathbf{n}_p^{(2)}}$$

Матрицы преобразования координат из базисов тел в неподвижный базис

$$\mathbf{A}^1 = \begin{bmatrix} \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 \\ \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} \cos \varphi_2 & -\sin \varphi_2 \\ \sin \varphi_2 & \cos \varphi_2 \end{bmatrix}$$

Преобразование координат



Матрица преобразования координат из поворнутой системы координат в исходную

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{A}\mathbf{R}', \quad \mathbf{R}' = \mathbf{A}^T \mathbf{R}$$

Радиус-вектор точки контакта относительно полюса C_2 :

$$\vec{\rho}_{2i} = \vec{r}_1 + \vec{a}_i \Delta_i - \vec{r}_2$$

Координатный столбец радиус-вектора точки контакта относительно полюса C_2 в базисе $C_2x_2y_2z_2$:

$$\rho_{2i}^{(2)} = \mathbf{A}^{2T}(\mathbf{r}_1^{(0)} + \mathbf{A}^1 \mathbf{a}_i^{(1)} \Delta_i - \mathbf{r}_2^{(0)})$$

Сила пружинного толкателя

Сила пружинного толкателя пропорциональна перемещению штока толкателя Δ_i :

$$F_i(\Delta_i) = \begin{cases} F_{i0} - \frac{F_{i0}-F_{ik}}{h_i} \Delta_i & \Delta_i \leq h_i \\ 0, & \Delta_i > h_i \end{cases}$$

где F_{i0} – начальное усилие толкателя, F_{ik} – конечное усилие толкателя, h_i – ход толкателя.

Сила, действующая на КА

Векторная форма

$$\vec{F}_{2i} = \vec{a}_i F_i(\Delta_i)$$

Координатный столбец силы в базисе $Ox_0y_0z_0$

$$\mathbf{F}_{2i}^{(0)} = \mathbf{a}_i^{(0)} F_i(\Delta_i) = \mathbf{A}^1 \mathbf{a}_i^{(1)} F_i(\Delta_i)$$

Координатный столбец силы в базисе $C_2x_2y_2z_2$

$$\mathbf{F}_{2i}^{(2)} = \mathbf{a}_i^{(2)} F_i(\Delta_i) = \mathbf{A}^{2T} \mathbf{A}^1 \mathbf{a}_i^{(1)} F_i(\Delta_i)$$

Момент, действующий на КА

Векторная форма

$$\vec{M}_{2i}(\vec{F}_{2i}) = \vec{\rho}_{2i} \times \vec{a}_i F_i(\Delta_i)$$

Координатный столбец момента силы в базисе $C_2 x_2 y_2 z_2$

$$\mathbf{M}_{2i}^{(2)}(\mathbf{F}_{2i}^{(2)}) = \tilde{\boldsymbol{\rho}}_{2i}^{(2)} \mathbf{a}_i^{(2)} F_i(\Delta_i)$$

Матричная запись векторного произведения

$\tilde{\rho}_{2i}^{(2)}$ – кососимметричная матрица компонент координатного столбца вектора $\rho_{2i}^{(2)}$:

$$\tilde{\rho}_{2i}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & -\rho_{2iz}^{(2)} & \rho_{2iy}^{(2)} \\ \rho_{2iz}^{(2)} & 0 & -\rho_{2ix}^{(2)} \\ -\rho_{2iy}^{(2)} & \rho_{2ix}^{(2)} & 0 \end{pmatrix}$$

Здесь и далее оператор “тильда” преобразует координатный столбец $\mathbf{v}$ вектора $\vec{v}$ в кососимметричную матрицу

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 0 & -v_z & v_y \\ v_z & 0 & -v_x \\ -v_y & v_x & 0 \end{pmatrix}$$

Сила, действующая на орбитальную ступень

Векторная форма

$$\vec{F}_{1i} = -\vec{F}_{2i} = -\vec{a}_i F_i(\Delta_i)$$

Координатный столбец силы в базисе $Ox_0y_0z_0$

$$\mathbf{F}_{1i}^{(0)} = -\mathbf{F}_{2i}^{(0)} = -\mathbf{a}_i^{(0)} F_i(\Delta_i) = -\mathbf{A}^1 \mathbf{a}_i^{(1)} F_i(\Delta_i)$$

Координатный столбец силы в базисе $C_1x_1y_1z_1$

$$\mathbf{F}_{1i}^{(2)} = -\mathbf{a}_i^{(1)} F_i(\Delta_i)$$

Момент, действующий на орбитальную ступень

Векторная форма

$$\vec{M}_{1i}(\vec{F}_{1i}) = -(\vec{\rho}_{1i} + \Delta_i \vec{a}_i) \times \vec{a}_i F_i(\Delta_i) = -\vec{\rho}_{1i} \times \vec{a}_i F_i(\Delta_i)$$

Координатный столбец момента силы в базисе $C_1 x_1 y_1 z_1$

$$\mathbf{M}_{1i}^{(1)}(\vec{F}_{1i}) = -\tilde{\boldsymbol{\rho}}_{1i}^{(1)} \mathbf{a}_i^{(1)} F_i(\Delta_i)$$

$\tilde{\boldsymbol{\rho}}_{1i}^{(1)}$ – кососимметричная матрица компонент координатного столбца вектора $\boldsymbol{\rho}_{1i}^{(1)}$

Уравнения движения ступени

Уравнение движения центра масс (для двух толкателей)

$$m_1 \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = \mathbf{F}_{11}^{(0)} + \mathbf{F}_{12}^{(0)}$$

Уравнение движения вокруг центра масс

$$J_1 \ddot{\varphi}_1 = M_{11,z} + M_{12,z}$$

Момент относительно оси $C_1 z_1$ от силы толкателя i :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{1i}^{(1)}(\vec{F}_{1i}) &= -\tilde{\boldsymbol{\rho}}_{1i}^{(1)} \mathbf{a}_i^{(1)} F_i(\Delta_i) = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & \rho_{1iy}^{(1)} \\ 0 & 0 & -\rho_{1ix}^{(1)} \\ -\rho_{1iy}^{(1)} & \rho_{1ix}^{(1)} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{ix}^{(1)} \\ a_{iy}^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix} F_i(\Delta_i) = \\ &= - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\rho_{1iy}^{(1)} a_{ix}^{(1)} + \rho_{1ix}^{(1)} a_{iy}^{(1)} \end{bmatrix} F_i(\Delta_i) \end{aligned}$$

Момент относительно оси C_1Z_1 от силы толкателя i :

$$M_{2i,z}^{(2)} = (\rho_{1iy}^{(1)} a_{ix}^{(1)} - \rho_{1ix}^{(1)} a_{iy}^{(1)}) F_i(\Delta_i)$$

Уравнения движения КА

Уравнение движения центра масс (для двух толкателей)

$$m_2 \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = \mathbf{F}_{21}^{(0)} + \mathbf{F}_{22}^{(0)}$$

Уравнение движения вокруг центра масс

$$J_2 \ddot{\varphi}_2 = M_{21,z} + M_{22,z}$$

Момент относительно оси $C_2 z_2$ от силы толкателя i :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{2i}^{(2)}(\vec{F}_{2i}) &= \tilde{\boldsymbol{\rho}}_{2i}^{(2)} \mathbf{a}_i^{(2)} F_i(\Delta_i) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \rho_{2iy}^{(2)} \\ 0 & 0 & -\rho_{2ix}^{(2)} \\ -\rho_{2iy}^{(2)} & \rho_{2ix}^{(2)} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{ix}^{(2)} \\ a_{iy}^{(2)} \\ 0 \end{bmatrix} F_i(\Delta_i) = \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\rho_{2iy}^{(2)} a_{ix}^{(2)} + \rho_{2ix}^{(2)} a_{iy}^{(2)} \end{bmatrix} F_i(\Delta_i) \end{aligned}$$

Момент относительно оси C_2Z_2 от силы толкателя i :

$$M_{2i,z}^{(2)} = (\rho_{2ix}^{(2)} a_{iy}^{(2)} - \rho_{2iy}^{(2)} a_{ix}^{(2)}) F_i(\Delta_i)$$

Координатный столбец вектора $\vec{a}_i$, в системе координат КА:

$$\mathbf{a}_i^{(2)} = \mathbf{A}^{2T} \mathbf{A}^1 \mathbf{a}_i^{(1)}$$

Модель пространственного движения

Уравнения движения центра масс КА

Координатная форма уравнений движения центра масс КА:

$$\begin{cases} m_2 \ddot{x}_2 = \sum_{i=1}^{n_p} F_{1ix}, \\ m_2 \ddot{y}_2 = \sum_{i=1}^{n_p} F_{1iy}, \\ m_2 \ddot{z}_2 = \sum_{i=1}^{n_p} F_{1iz} \end{cases}$$

Матричная форма уравнений движения

$$\mathbf{m}_2 \ddot{\mathbf{r}}_2^{(0)} = \sum_{i=1}^{n_p} \mathbf{F}_{1i}^{(0)}$$

Уравнения движения КА вокруг центра масс

Динамические уравнения Эйлера

$$\begin{cases} J_{2x}\dot{\omega}_{2x} - (J_{2y} - J_{2z})\omega_{2y}\omega_{2z} = \sum_{i=1}^{n_p} M_{1ix}^{(2)}, \\ J_{2y}\dot{\omega}_{2y} - (J_{2z} - J_{2x})\omega_{2z}\omega_{2x} = \sum_{i=1}^{n_p} M_{1iy}^{(2)}, \\ J_{2z}\dot{\omega}_{2z} - (J_{2x} - J_{2y})\omega_{2x}\omega_{2y} = \sum_{i=1}^{n_p} M_{1iz}^{(2)} \end{cases}$$

Матричная форма уравнений движения вокруг центра масс:

$$\mathbf{J}_2^{(2)} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}_2^{(2)} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_2^{(2)} \mathbf{J}_2^{(2)} \cdot \boldsymbol{\omega}_2^{(2)} = \sum_{i=1}^{n_p} \mathbf{M}_{2i}^{(2)}$$

где $\mathbf{J}_2^{(2)}$ - тензор инерции КА в базисе $C_2x_2y_2z_2$.

Кинематические уравнения

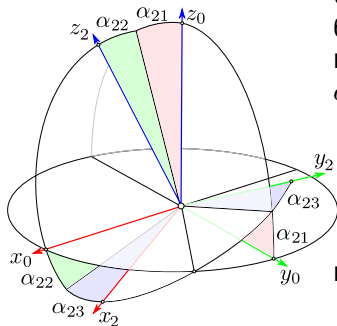
- Для определения матрицы поворота динамические уравнения Эйлера необходимо дополнить кинематическими уравнениями, связывающими производные параметров, задающих ориентацию тела, с угловыми скоростями.
- Кинематические уравнения для углов Крылова (Брайнта)

$$\begin{cases} \dot{\alpha}_{21} &= \frac{\cos \alpha_{23}}{\cos \alpha_{22}} \omega_{2x} - \frac{\sin \alpha_{23}}{\cos \alpha_{22}} \omega_{2y}, \\ \dot{\alpha}_{22} &= \sin \alpha_{13} \omega_{2x} + \cos \alpha_{13} \omega_{2y}, \\ \dot{\alpha}_{23} &= -\cos \alpha_{23} \tan \alpha_{22} \omega_{2x} + \sin \alpha_{23} \tan \alpha_{22} \omega_{2y} + \omega_{2z}. \end{cases}$$

где $\omega_{2x}, \omega_{2y}, \omega_{2z}$ – проекции угловой скорости КА на оси системы координат $C_2x_2y_2z_2$.

Уравнения движения КА вокруг центра масс

Углы Крылова (Брайнта)



Ориентация базиса $C_2x_2y_2z_2$ относительно базиса $Ox_0y_0z_0$ задаётся тремя последовательными поворотами на углы α_{21} , α_{22} и α_{23} . Матрица поворота:

$$\mathbf{A}^1 = \begin{bmatrix} c_2c_3 & -c_2s_3 & s_2 \\ c_1s_3 + s_1s_2c_3 & c_1c_3 - s_1s_2s_3 & -s_1c_2 \\ s_1s_3 - c_1s_2c_3 & s_1c_3 + c_1s_2s_3 & c_1c_2 \end{bmatrix}$$

где $c_j = \cos \alpha_{2j}$, $s_j = \sin \alpha_{2j}$, $j = 1, 2, 3$.

Уравнения движения орбитальной ступени

Динамические уравнения

- Уравнение движения центра масс

$$\mathbf{m}_1 \ddot{\mathbf{r}}_1^{(0)} = \sum_{i=1}^{n_p} \mathbf{F}_{1i}^{(0)}$$

- Уравнение движения вокруг центра масс

$$\mathbf{J}_1 \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}_1^{(1)} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_1^{(1)} \mathbf{J}_1 \cdot \boldsymbol{\omega}_1^{(1)} = \sum_{i=1}^{n_p} \mathbf{M}_{1i}^{(1)}$$

Уравнения движения орбитальной ступени

Кинематические уравнения

- Ориентация базиса $C_1x_1y_1z_1$, связанного с орбитальной ступенью, относительно базиса $Ox_0y_0z_0$ задаётся тремя последовательными поворотами на углы α_{11} , α_{12} и α_{13} .
- Кинематические уравнения для углов α_{11} , α_{12} и α_{13} :

$$\begin{cases} \dot{\alpha}_{11} &= \frac{\cos \alpha_{13}}{\cos \alpha_{12}} \omega_{1x} - \frac{\sin \alpha_{13}}{\cos \alpha_{12}} \omega_{1y}, \\ \dot{\alpha}_{12} &= \sin \alpha_{13} \omega_{x_2} + \cos \alpha_{13} \omega_{y_2}, \\ \dot{\alpha}_{13} &= -\cos \alpha_{13} \tan \alpha_{12} \omega_{1x} + \sin \alpha_{13} \tan \alpha_{12} \omega_{1y} + \omega_{1z}. \end{cases}$$

где $\omega_{1x}, \omega_{1y}, \omega_{1z}$ – проекции угловой скорости КА

Список использованных источников

- 1 Расчёт и проектирование систем разделения ступеней ракет: Учеб. пособие / К. С. Колесников, В. В. Кокушкин, С. В. Борзых, Н. В. Панкова. – Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2006.
- 2 Аналитическое проектирование механических систем: Учеб. пособие / Г. Е. Круглов. – Самараск. гос. аэрокосм. ун-т, Самара, 2001.
- 3 Й. Виттенбург Динамика систем твёрдых тел. М.: Мир, 1980.