

Относительное орбитальное движение

Юдинцев В. В.

Кафедра теоретической механики

8 сентября 2023 г.



САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
SAMARA UNIVERSITY

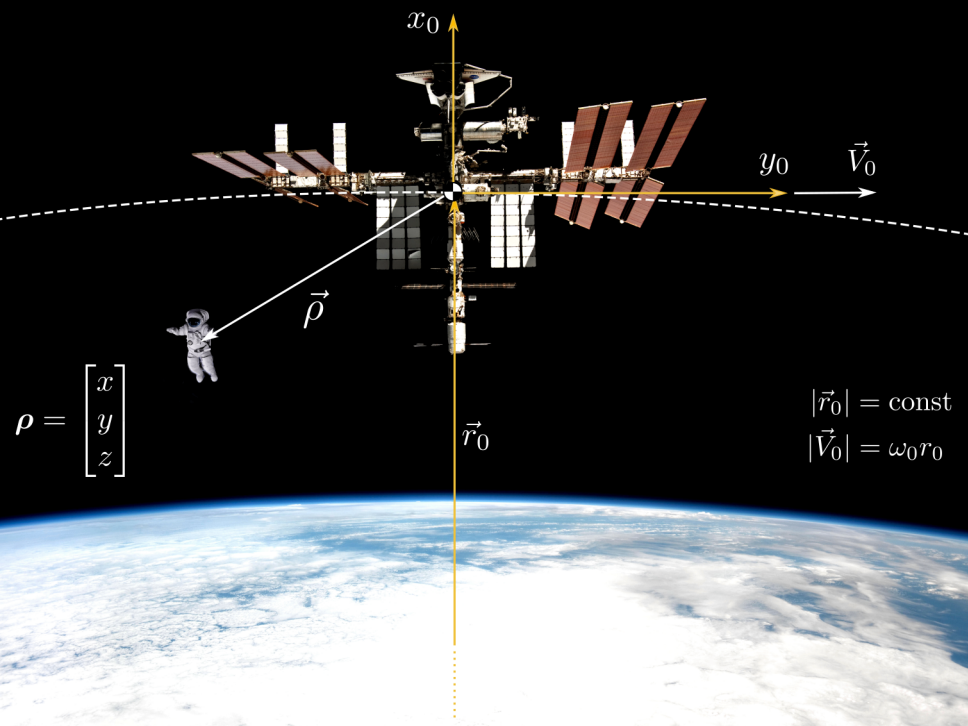
- 1 Орбитальная подвижная система координат
- 2 Движение станции
- 3 Уравнения относительного движения
- 4 Интегрирование уравнений движения
- 5 Задание

Относительное движение

- Космическая станция движется по круговой орбите радиусом r_0
- Рассматривается движение объекта (КА или космонавта) относительно станции
- Предполагается, что расстояние между станцией и объектом ρ намного меньше радиуса r_0 орбиты станции:

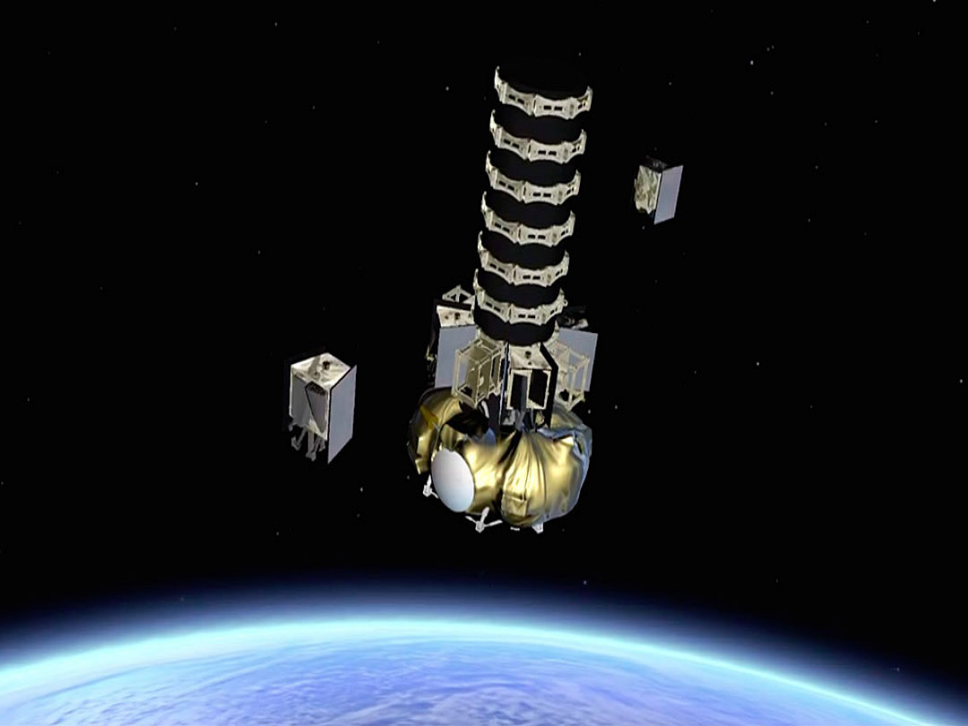
$$\rho \ll r_0$$

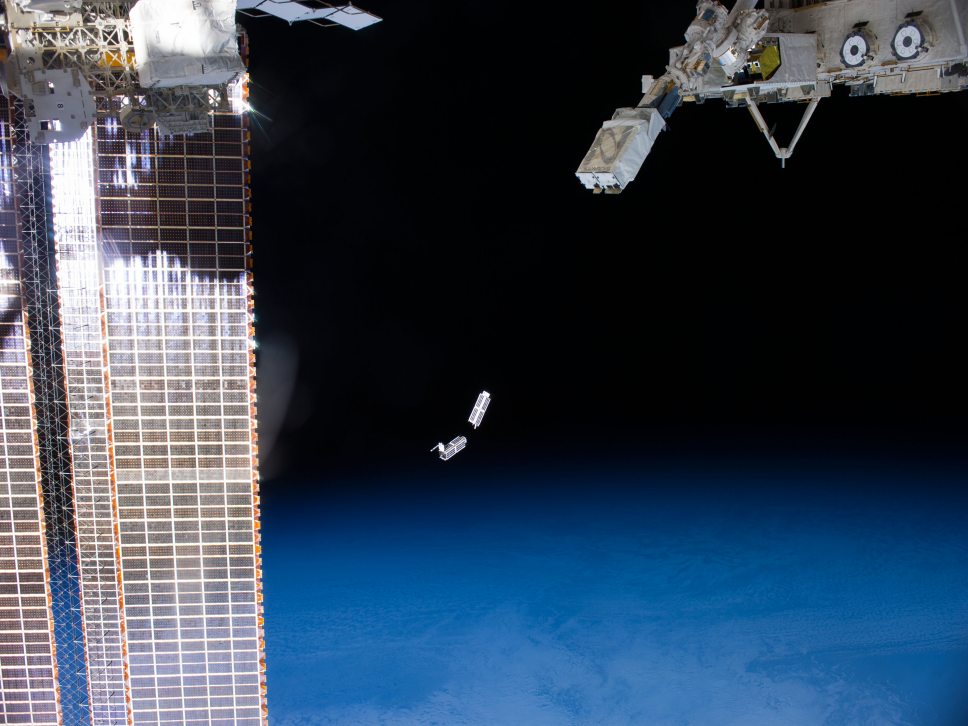
- Движение объекта относительно станции рассматривается относительно **орбитальной подвижной** системы координат $Ox_0y_0z_0$, **движущейся со станцией**

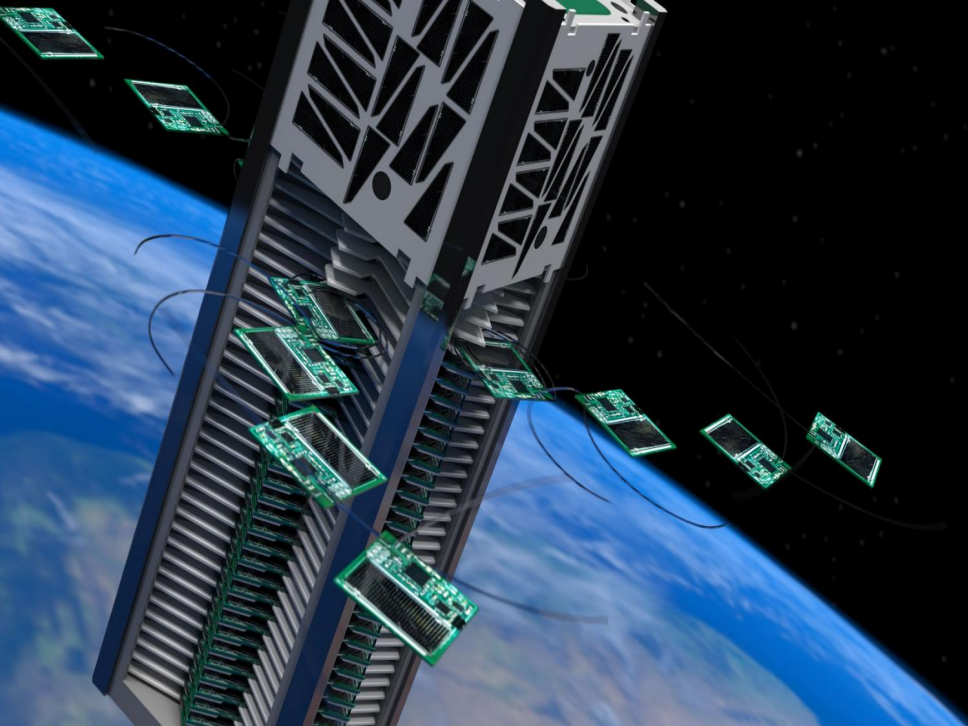


$$\rho = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$|\vec{r}_0| = \text{const}$$
$$|\vec{V}_0| = \omega_0 r_0$$



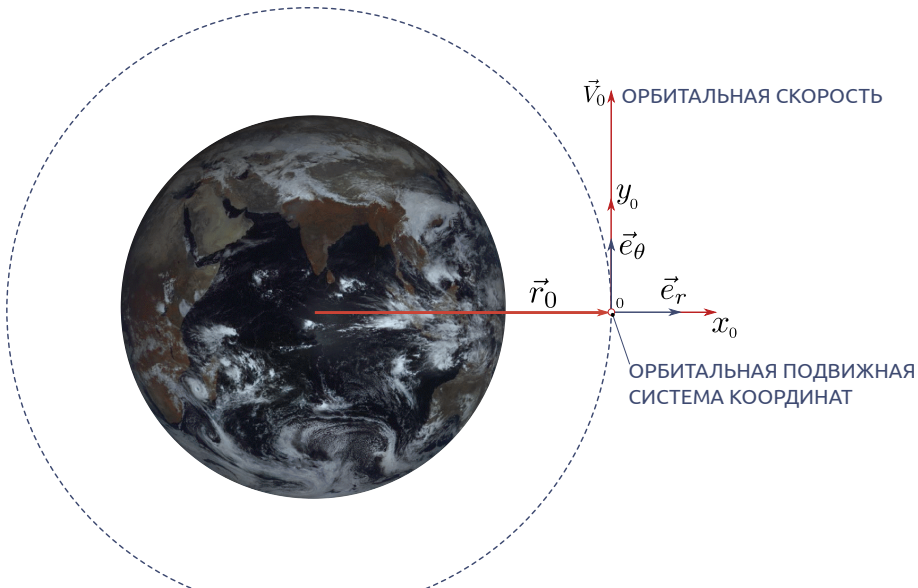




Орбитальная подвижная система координат

Направление осей СК $Ox_0y_0z_0$

КРУГОВАЯ ОРБИТА



Орбитальная подвижная система координат

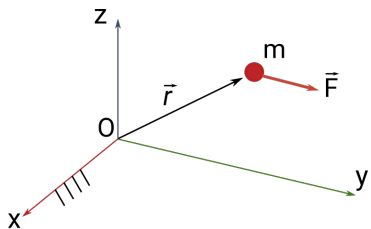
Направления осей орбитальной подвижной системы координат, связанной со станцией:

- Ox_0 – направлена вдоль радиус-вектора центра масс станции относительно центра Земли
- Oy_0 – направлена вдоль вектора орбитальной скорости станции
- Oz_0 – направлена перпендикулярно плоскости орбиты

Положение объекта относительно системы координат $Ox_0y_0z_0$ определяется вектором $\vec{\rho}$. Орбитальная подвижная система координат является неинерциальной.

Движение станции

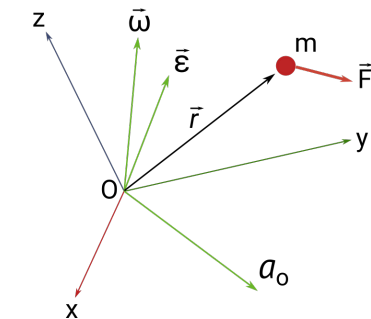
Неинерциальная СК



В инерциальной системе координат

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} \quad (1)$$

В неинерциальной системе координат к активным силам добавляются «силы инерции»



$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \vec{F}_e + \vec{F}_c \quad (2)$$

$$\vec{F}_e = -m(\vec{a}_0 + \vec{\epsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}))$$

$$\vec{F}_c = -2m \left(\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right)$$

Скорость движения по орбите

Система координат $Ox_0y_0z_0$ неинерциальная. Ускорение центра масс станции при её движении по круговой орбите с постоянной скоростью:

$$a_0 = \frac{V_0^2}{r_0} = \omega_0^2 r_0 \quad (3)$$

Это ускорение вызвано действием силы притяжения Земли:

$$a_0 = \frac{F}{m} = \frac{\mu}{r_0^2} \quad (4)$$

Скорость движения по орбите

Из равенства

$$\omega_0^2 r_0 = \frac{\mu}{r_0^2} \quad (5)$$

следует выражение для угловой скорости движения по орбите

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\mu}{r_0^3}} \quad (6)$$

и линейная скорость движения по орбите

$$V_0 = \omega_0 r_0 = \sqrt{\frac{\mu}{r_0}} \quad (7)$$

Для орбиты высотой 500 км $r_0 = R_{\oplus} + 500$ км, $V_0 = 7788$ м/с,
 $\omega_0 = 0.001185$ рад/с

Скорость движения по орбите

Период обращения по круговой орбите высотой h_0

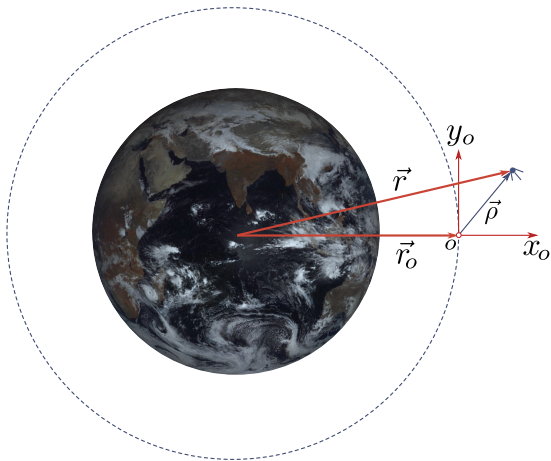
$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{r_0^3}{\mu}} = 2\pi\sqrt{\frac{(R_{\oplus} + h_0)^3}{\mu}} \quad (8)$$

Для круговой орбиты $h_0 = 500$ км: $T = 5668$ с = 94 минуты.

Для круговой орбиты $h_0 = 200$ км: $T = 5301$ с = 88 минут.

Уравнения относительного движения

Уравнение относительного движения КА



$$m\ddot{\rho} = \vec{F} + \vec{F}_e + \vec{F}_c \quad (9)$$

- \vec{F}_e – переносная сила инерции
- \vec{F}_c – сила инерции Кориолиса
- \vec{F} – гравитационная сила

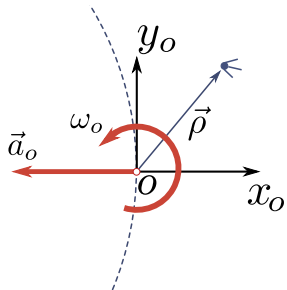
$Ox_0y_0z_0$ – неинерциальная СК

Система координат $Ox_0y_0z_0$ вращается с угловой скоростью ω_o вокруг оси Oz_0

$$\omega_o = \sqrt{\frac{\mu}{r_o^3}} \quad (10)$$

Начало системы координат $Ox_0y_0z_0$ движется с ускорением

$$a_o = \omega_o^2 r_o = \frac{V_o^2}{r_o} \quad (11)$$



$$\boxed{m\ddot{\vec{\rho}} = \vec{F} + \vec{F}_e + \vec{F}_c} \quad (12)$$

- \vec{F}_e – переносная сила инерции:

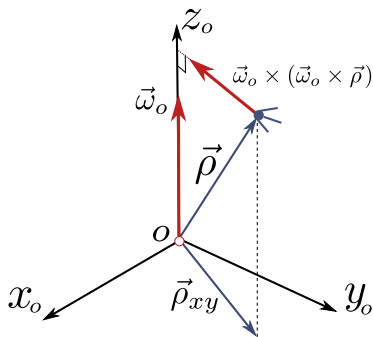
$$\vec{F}_e = -m\vec{a}_e = -m(\vec{a}_o + \vec{\omega}_o \times (\vec{\omega}_o \times \vec{\rho})) \quad (13)$$

- \vec{F}_c – сила инерции Кориолиса:

$$\vec{F}_c = -m\vec{a}_c = -2m\vec{\omega}_o \times \dot{\vec{\rho}} \quad (14)$$

- \vec{F} – гравитационная сила.

Переносная сила инерции



$$\begin{aligned}\vec{F}_e &= -m\vec{a}_e = \\ &= -m[\vec{a}_o + \vec{\omega}_o \times (\vec{\omega}_o \times \vec{\rho})] \quad (15)\end{aligned}$$

Центростремительно ускорение
направлено к оси Oz_0

$$\begin{aligned}\vec{a}_o &= -\omega_o^2 \vec{r}_o \\ \vec{\omega}_o \times (\vec{\omega}_o \times \vec{\rho}) &= -\omega_o^2 \vec{\rho}_{xy}\end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{F}_e = m(\omega_o^2 \vec{r}_o + \omega_o^2 \vec{\rho}_{xy})} \quad (16)$$

Гравитационная сила

$$m\ddot{\vec{\rho}} = \vec{F} + \vec{F}_e + \vec{F}_c \quad (17)$$

Гравитационная сила, действующая на КА

$$\vec{F} = -G \frac{M_{\oplus} m}{|\vec{r}|^2} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = -\mu \frac{m}{|\vec{r}|^2} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \quad (18)$$

$$\vec{F} = -\mu \frac{m}{|\vec{r}|^2} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = -\mu \frac{m \vec{r}}{|\vec{r}|^3} \quad (19)$$

Уравнение движения

После подстановки выражения, полученного для μ в выражение для гравитационной силы, действующий на КА

$$\vec{F} = -\mu \frac{m \vec{r}}{|\vec{r}|^3} = -\omega_o^2 \left(\frac{r_o}{r} \right)^3 m \vec{r} \quad (20)$$

уравнение относительного движения КА принимает вид

$$m \ddot{\vec{\rho}} = -\omega_o^2 \left(\frac{r_o}{r} \right)^3 m \vec{r} + m \omega_o^2 (\vec{r}_o + \vec{\rho}_{xy}) - 2m \vec{\omega}_o \times \dot{\vec{\rho}} \quad (21)$$

или

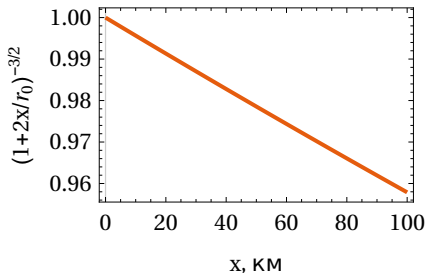
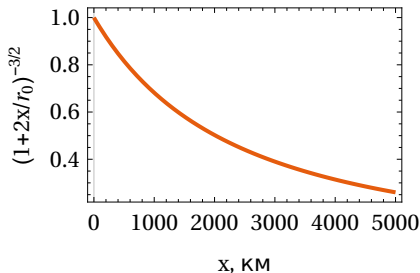
$$\ddot{\vec{\rho}} = -\omega_o^2 \left(\frac{r_o}{r} \right)^3 (\vec{r}_o + \vec{\rho}) + \omega_o^2 (\vec{r}_o + \vec{\rho}_{xy}) - 2 \vec{\omega}_o \times \dot{\vec{\rho}} \quad (22)$$

Линеаризация $(r_o/r)^3$

$$\begin{aligned} \left(\frac{r_o}{r}\right)^3 &= \left(\frac{r}{r_o}\right)^{-3} = \left[\left(\frac{r}{r_o}\right)^2\right]^{-\frac{3}{2}} = \left[\frac{(\vec{r}_o + \vec{\rho})^2}{r_o^2}\right]^{-\frac{3}{2}} = \\ &= \left[\frac{r_o^2 + 2\vec{r}_o \cdot \vec{\rho} + \rho^2}{r_o^2}\right]^{-\frac{3}{2}} = \left(\frac{r_o^2 + 2r_o x + \rho^2}{r_o^2}\right)^{-\frac{3}{2}} = \\ &= \left(1 + \frac{2x}{r_o} + \frac{\rho^2}{r_o^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \end{aligned} \quad (23)$$

$$\boxed{\left(\frac{r_o}{r}\right)^3 \approx \left(1 + \frac{2x}{r_o}\right)^{-\frac{3}{2}}} \quad (24)$$

Линеаризация $(r_o/r)^3$



Для $x \ll r_o$ выражение $(1 + 2x/r_0)^{-3/2}$ можно разложить в ряд по степеням x в окрестности $x = 0$, оставив только линейную часть разложения

$$\left(1 + \frac{2x}{r_o}\right)^{-\frac{3}{2}} \approx 1 - 3\frac{x}{r_o} \quad (25)$$

Линеаризованное уравнение движения

Исходное уравнение относительного движения (нелинейное)

$$\ddot{\vec{\rho}} = -\omega_0^2 \left(\frac{r_0}{r}\right)^3 (\vec{r}_0 + \vec{\rho}) + \omega_0^2(\vec{r}_0 + \vec{\rho}_{xy}) - 2\vec{\omega}_0 \times \dot{\vec{\rho}} \quad (26)$$

Линеаризованное уравнение

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{\rho}} &= -\omega_0^2 \left(1 - 3\frac{x}{r_0}\right) (\vec{r}_0 + \vec{\rho}) + \omega_0^2(\vec{r}_0 + \vec{\rho}_{xy}) - 2\vec{\omega}_0 \times \dot{\vec{\rho}} = \\ &= \underline{-\omega_0^2 \vec{r}_0} - \omega_0^2 \vec{\rho} + 3\omega_0^2 \frac{x}{r_0} \vec{r}_0 + 3\omega_0^2 \frac{x}{r_0} \vec{\rho} + \underline{\omega_0^2 \vec{r}_0} + \omega_0^2 \vec{\rho}_{xy} - 2\vec{\omega}_0 \times \dot{\vec{\rho}} = \\ &= 3\omega_0^2 \frac{x}{r_0} \vec{r}_0 + \omega_0^2 (\vec{\rho}_{xy} - \vec{\rho}) - 2\vec{\omega}_0 \times \dot{\vec{\rho}} \quad (27) \end{aligned}$$

Линеаризованное уравнение

- Векторное уравнение

$$\boxed{\ddot{\vec{\rho}} = 3\omega_o^2 \frac{x}{r_o} \vec{r}_o + \omega_o^2 (\vec{\rho}_{xy} - \vec{\rho}) - 2\vec{\omega}_o \times \dot{\vec{\rho}}} \quad (28)$$

- Уравнение в координатной форме, в системе координата $Ox_o y_o z_o$

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = 3\omega_o^2 \frac{x}{r_o} \begin{bmatrix} r_o \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \omega_o^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -z \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega_o \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{bmatrix} \quad (29)$$

Линеаризованные уравнения

Система дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \ddot{x} = 3\omega_0^2 x + 2\omega_0 \dot{y}, \\ \ddot{y} = -2\omega_0 \dot{x}, \\ \ddot{z} = -\omega_0^2 z. \end{cases} \quad (30)$$

Начальные условия:

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0, & \dot{x}(0) &= \Delta V_x \\ y(0) &= y_0, & \dot{y}(0) &= \Delta V_y \\ z(0) &= z_0, & \dot{z}(0) &= \Delta V_z \end{aligned} \quad (31)$$

Интегрирование уравнений движения

Уравнение 3

- Движение вдоль оси z независимо от движений вдоль осей x и y

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z = 0$$

- Вид решения

$$z(t) = C_1 \sin \omega_0 t + C_2 \cos \omega_0 t$$

- С учётом начальных условий

$$z(0) = C_2, \quad \dot{z}(0) = \Delta V_z = C_1 \omega_0$$

$$z(t) = \frac{\Delta V_z}{\omega_0} \sin \omega_0 t + z_0 \cos \omega_0 t \quad (32)$$

Уравнение 2

$$\ddot{y} = -2\omega_o \dot{x} \quad (33)$$

Введем обозначение $u_y = \dot{y}$ и проинтегрируем уравнение (33)

$$\int_{\Delta V_y}^{u_y} du_y = -2\omega_o \int_{x_0}^x dx \quad \rightarrow \quad u_y - \Delta V_y = -2\omega_o(x - x_0)$$

$$\boxed{\dot{y} = \Delta V_y - 2\omega_o(x - x_0)} \quad (34)$$

Уравнение 1

После подстановки решения

$$\dot{y} = \Delta V_y - 2\omega_o(x - x_0)$$

в первое уравнение системы

$$\ddot{x} = 3\omega_o^2 x + 2\omega_o \dot{y}$$

уравнение движения вдоль оси x принимает вид

$$\ddot{x} + \omega_o^2 x = 2\omega_o \Delta V_y + 4\omega_o^2 x_0 \quad (35)$$

Уравнение 1

Неоднородное линейное дифференциальное уравнение

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 2\omega_0 \Delta V_y + 4\omega_0^2 x_0$$

Вид решения

$$x(t) = C_3 \sin \omega_0 t + C_4 \cos \omega_0 t + C_5$$

где C_5 – частное решение неоднородного дифференциального уравнения

$$C_5 = \frac{2\omega_0 \Delta V_y + 4\omega_0^2 x_0}{\omega_0^2} = \frac{2\Delta V_y}{\omega_0} + 4x_0 \quad (36)$$

Уравнение 1

Неоднородное линейное дифференциальное уравнение

$$\ddot{x} + \omega_o^2 x = 2\omega_o \Delta V_y + 4\omega_o^2 x_0$$

Вид решения

$$x(t) = C_3 \sin \omega_o t + C_4 \cos \omega_o t + C_5$$

Постоянные интегрирования C_3, C_4 определяются из начальных условий

$$x(0) = x_0 = C_4 + C_5 \rightarrow \boxed{C_4 = -\frac{2\Delta V_y}{\omega_o} - 3x_0} \quad (37)$$

$$\dot{x}(0) = \Delta V_x = C_3 \omega_o \rightarrow \boxed{C_3 = \frac{\Delta V_x}{\omega_o}} \quad (38)$$

Уравнение 1

После подстановки решения первого уравнения (для оси x_0)

$$x(t) = \frac{\Delta V_x}{\omega_o} \sin \omega_o t - \left(\frac{2\Delta V_y}{\omega_o} + 3x_0 \right) \cos \omega_o t + \frac{2\Delta V_y}{\omega_o} + 4x_0$$

во второе уравнение

$$\dot{y} = \Delta V_y - 2\omega_o(x - x_0)$$

$$\dot{y} = -2\omega_o \left(\frac{\Delta V_x}{\omega_o} \sin \omega_o t - \left(\frac{2\Delta V_y}{\omega_o} + 3x_0 \right) \cos \omega_o t \right) - 3\Delta V_y - 6\omega_o x_0$$

и интегрирования

$$y = y_0 + 2 \frac{\Delta V_x}{\omega_o} (\cos \omega_o t - 1) + \left(4 \frac{\Delta V_y}{\omega_o} + 6x_0 \right) \sin \omega_o t - (6\omega_o x_0 + 3\Delta V_y)t$$

Уравнения относительного движения

$$x(t) = \frac{\Delta V_x}{\omega_o} \sin \omega_o t - \left(\frac{2\Delta V_y}{\omega_o} + 3x_0 \right) \cos \omega_o t + \frac{2\Delta V_y}{\omega_o} + 4x_0$$

$$y(t) = y_0 + 2 \frac{\Delta V_x}{\omega_o} (\cos \omega_o t - 1) + \left(4 \frac{\Delta V_y}{\omega_o} + 6x_0 \right) \sin \omega_o t - (6\omega_o x_0 + 3\Delta V_y)t$$

$$z(t) = \frac{\Delta V_z}{\omega_o} \sin \omega_o t + z_0 \cos \omega_o t$$

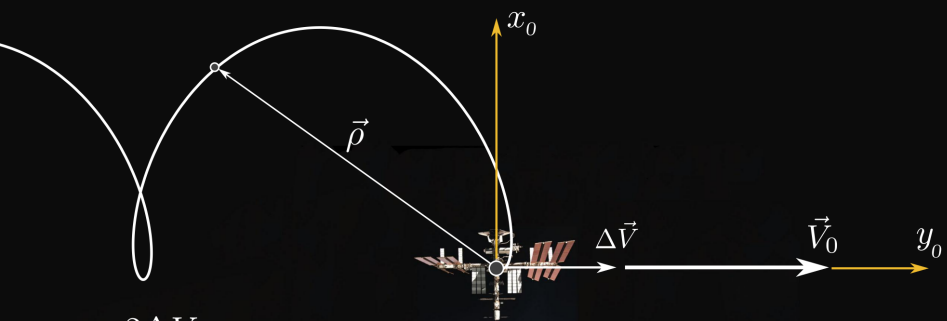
Уравнения относительного движения

Для случая $x_0 = y_0 = z_0 = 0$

$$x(t) = \frac{\Delta V_x}{\omega_0} \sin \omega_0 t - \frac{2\Delta V_y}{\omega_0} \cos \omega_0 t + \frac{2\Delta V_y}{\omega_0}$$

$$y(t) = 2 \frac{\Delta V_x}{\omega_0} (\cos \omega_0 t - 1) + 4 \frac{\Delta V_y}{\omega_0} \sin \omega_0 t - 3\Delta V_y t$$

$$z(t) = \frac{\Delta V_z}{\omega_0} \sin \omega_0 t$$



$$x(t) = \frac{2\Delta V_y}{\omega_0} (1 - \cos \omega_0 t),$$

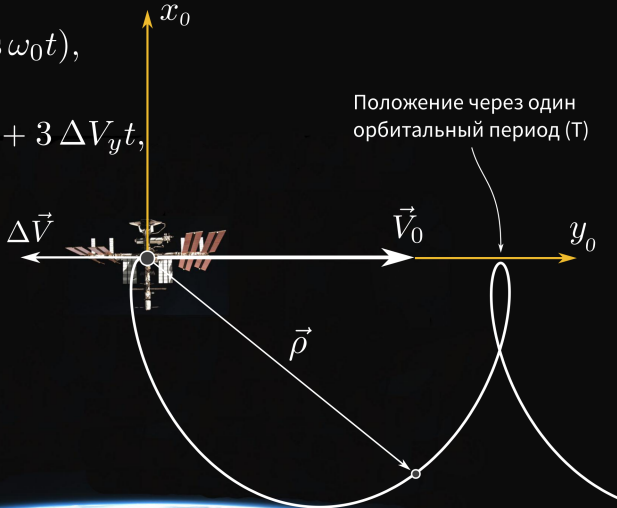
$$y(t) = 4 \frac{\Delta V_y}{\omega_0} \sin \omega_0 t - 3 \Delta V_y t,$$

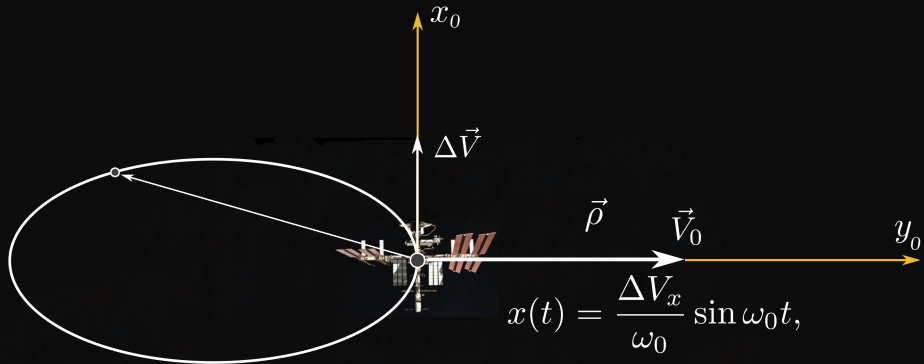
$$z(t) = 0$$

$$x(t) = -\frac{2\Delta V_y}{\omega_0} (1 - \cos \omega_0 t),$$

$$y(t) = -4 \frac{\Delta V_y}{\omega_0} \sin \omega_0 t + 3 \Delta V_y t,$$

$$z(t) = 0$$



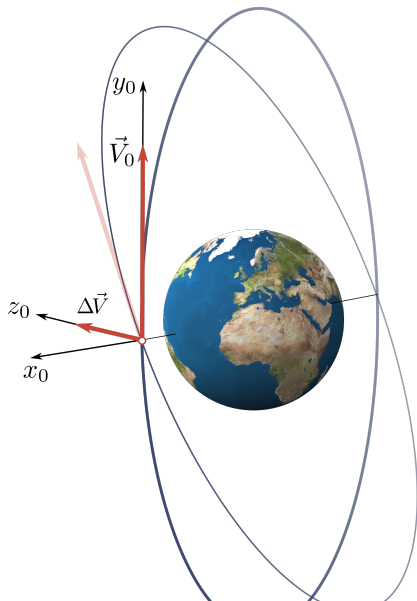


$$x(t) = \frac{\Delta V_x}{\omega_0} \sin \omega_0 t,$$

$$y(t) = 2 \frac{\Delta V_x}{\omega_0} (\cos \omega_0 t - 1),$$

$$z(t) = 0$$

Отделение по нормали к орбите



$$\Delta V_x = \Delta V_y = 0, \Delta V_z \neq 0$$

$$x(t) = 0,$$

$$y(t) = 0,$$

$$z(t) = \frac{\Delta V_z}{\omega_0} \sin \omega_0 t$$

Выводы

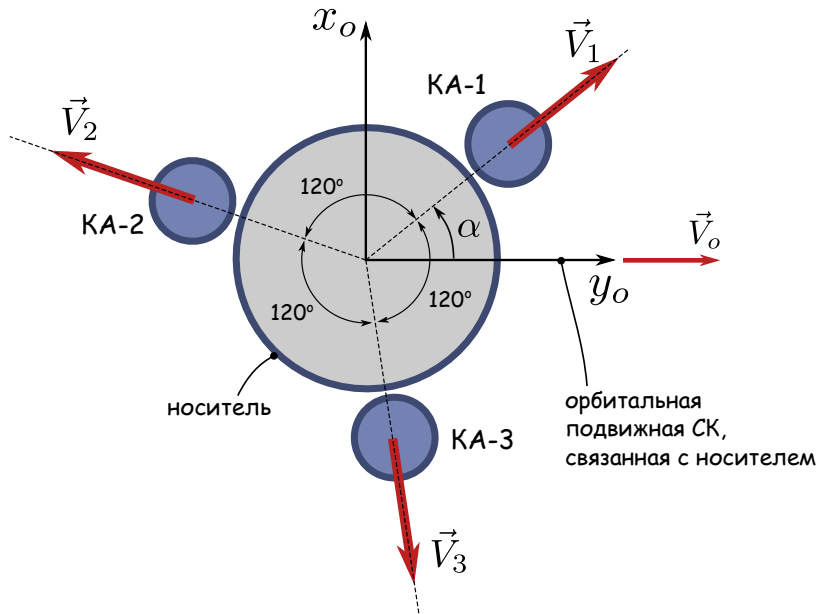
- Объект, отделившийся от станции вдоль нормали к плоскости орбиты, вернётся на станцию через половину орбитального периода станции.
- Объект, отделившийся от станции вдоль её радиус-вектора, возвратится на станцию через орбитальный период.
- Если вектор приращения объекта относительно станции направлен вдоль вектора её орбитальной скорости, то с каждым орбитальным периодом расстояние между объектом и станцией будет увеличиваться.

Задание

Групповое отделение КА



Групповое отделение КА



От носителя (орбитальной ступени) одновременно отделяется три малых космических аппарата с одинаковыми скоростями $V_1 = V_2 = V_3 = 1$ м/с. Векторы приращений скоростей малых КА относительно орбитальной ступени лежат в плоскости орбиты, как показано на рисунке на предыдущем слайде. Носитель движется по круговой орбите высотой 300 км.

- 1 Используя уравнения относительного орбитального движения, определите наилучший угол отделения КА – α , при котором минимальное расстояние между любыми КА и между любым КА и носителем через один орбитальный период носителя было бы максимальным.
- 2 Постройте траектории движения КА относительно носителя (на одном рисунке).
- 3 Постройте графики изменения расстояний между КА и носителем и между каждой парой КА (на одном рисунке).